УДК 517.392

И. В. Бойков, А. И. Бойкова, П. В. Айкашев

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ФРАКТАЛАХ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений являются активно развивающимся направлением вычислительной математики. Это связано с многочисленными приложениями гиперсингулярных интегральных уравнений в аэродинамике, электродинамике, физике и с тем обстоятельством, что аналитические решения гиперсингулярных интегральных уравнений возможны лишь в исключительных случаях. Помимо непосредственных приложений в физике и технике, гиперсингулярные интегральные уравнения первого рода возникают при приближенном решении граничных задач математической физики. В последнее время интерес к исследованию аналитических и численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений значительно усилился в связи с активным применением методов фрактальной геометрии в радиотехнике и радиолокации. Оказалось, что одним из основных методов моделирования фрактальных антенн являются гиперсингулярные интегральные уравнения. В данной работе предложены и обоснованы сплайн-коллокационные методы нулевого и первого порядков для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах.

Материалы и методы. В работе используются методы функционального анализа и теории приближения. Рассмотрены линейные одномерные и двумерные гиперсингулярные интегральные уравнения на фракталах. Для определенности в случае одномерного интеграла в качестве области интегрирования взято совершенное множество Кантора, в случае двумерного – ковер Серпинского. Построены проекционные вычислительные схемы, обоснование которых проводится на основе анализа логарифмических норм соответствующих матриц.

Результаты. Построены три вычислительные схемы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах различного вида и размерности. Получены оценки быстроты сходимости и погрешности вычислительных схем. Построенные вычислительные схемы являются моделями для построения и обоснования вычислительных схем на фракталах различной природы.

Выводы. Построены и обоснованы вычислительные схемы приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого и второго рода на модельных фракталах. В качестве модельных фракталов взято совершенное множество Кантора и ковер Серпинского. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании фрактальных антенн.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения, проекционные методы, фракталы, фрактальные антенны.

I. V. Boykov, A. I. Boykova, P. V. Aykashev

PROJECTION METHODS FOR SOLVING HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS IN FRACTALS

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

Abstract.

Background. Approximate methods for solving hypersingular integral equations are an actively developing area of calculus amthematics. It relates to multiple applications of hypersingular equations in aerodynamics, electrodynamics, physics, and also to one circumstance – analytical solutions of hypersingular integral equations are possible only in exceptional cases. Besides direct applications in physics and engineering, hypersingular integral equations of first kind occur in approximate solution of boundary problems of mathematical physics. Recently, the interest to studying analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations has significantly increased due to active application of methods of fractal geometry in radio engineering and radiolocation. It has turned out that one of main methods of fractal antennas modeling is hypersingular integral equations. The present work suggests and substantiates spline-collocation methods of zero and first orders for solving hypersingular integral equations on fractals.

Materials and methods. The study used methods of functional analysis and approximation theory. The authors considered linear one- and two-dimensional hypersingular integral equations on fractals. For determinancy in the case of a one-dimensional integral the research took the Cantor perfect set as an area of integration, and in the case of two-dimensional one – the Sierpinski carpet. The authors built projection computing schemes, substantiated on the basis of the analysis of logarithmic norms of the corresponding matrixes.

Results. The authors built three computing schemes for solving hypersingular integral equations on fractals of various types and dimensionality and obtained estimates of rapidity of convergence and error of the said schemes. The generated schemes appear to be models for building and substantiation of computing schemes on fractals of various nature.

Conclusions. The authors built and substantiated computing schemes of approx.imate solution of hypersingular integral equations of first and second kinds on model fractals. Model fractals are represented as the Cantor perfect set and the Sierpinski carpet. The obtained results may be used in fractal antennas modeling.

Key words: hypersingular integral equations, projection methods, fractals, fractal antennas.

В последнее десятилетие резко возросла актуальность численного моделирования рассеяния электромагнитных волн с планарными микрополосковыми структурами. Это объясняется необходимостью разработки миниатюрных принимающих и излучающих антенн, функционирующих в широком диапазоне частот. Разработка этого направления в первую очередь связана с построением теории и численного моделирования взаимодействия электромагнитных волн с фрактальными структурами, или, более точно, предфрактальными структурами, так как практически реализовать СВЧ-устройство в виде фрактала невозможно. Одним из основных математических аппаратов моделирования задач рассеяния электромагнитных волн на различных препятствиях являются гиперсингулярные интегральные уравнения. Поэтому возникает проблема разработки аналитических и численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений на различных многообразиях.

Данная работа посвящена приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах.

Работа состоит из пяти разделов и построена следующим образом. В первом разделе приведен краткий обзор приближенных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Во втором разделе приведены определения различных видов гиперсингулярных интегралов. Третий раздел содержит вспомогательные предложения. В нем дано определение логарифмической нормы матрицы и приведены важные теоремы, связывающие нормы обратных матриц с их логарифмическими нормами. Четвертый раздел посвящен приближенному решению гиперсингулярных интегральных уравнений на фрактальных кривых. В качестве конкретной кривой взято совершенное множество Кантора. В пятом разделе исследуются приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фрактальных поверхностях. В качестве конкретной поверхности взят ковер Серпинского (который иногда называют [1] пылью Серпинского).

1. Обзор приближенных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений

Несмотря на то, что гиперсингулярные интегральные уравнения являются основным математическим аппаратом при решении многих задач физики и техники, численные методы их решения известны только для очень небольшого класса уравнений. Довольно часто используется метод сведения исходных гиперсингулярных интегральных уравнений к сингулярным интегродифференциальным уравнениям и к интегродифференциальным уравнениям Фредгольма.

В работе [2] отмечалось, что в случае интегрального уравнения Фредгольма первого рода имеется значительный вычислительный эффект при обратной процедуре – переходе от слабосингулярного интегрального уравнения Фредгольма первого рода к гиперсингулярному интегральному уравнению.

Для приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений с фиксированной сингулярностью

$$a(t)x(t)+\int_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau)x(\tau)}{\tau^p}d\tau=f(t)$$

предложены и обоснованы [3] приближенные методы коллокации и механических квадратур.

В работе [4] предложен и обоснован сплайн-коллокационный метод со сплайнами нулевого и первого порядков для решения гиперсингулярных интегральных уравнений вида

$$a(t)x(t)+b(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau+\int_{-1}^{1}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),\quad p=2,4,\ldots$$

Сплайн-коллокационный метод нулевого порядка предложен и обоснован в работе [2] для приближенного решения бигиперсингулярных интегральных уравнений вида

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2)+b(t_1,t_2)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2\right)^p}+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2), \quad p=2,3,...$$

Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений теории крыла в одномерном случае исследовались в работе [5], для многомерных – в работах [6, 7].

Обзор приближенных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода представлен в работе [8].

Значительно более общие результаты получены для приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений на гладких замкнутых контурах. Это связано с возможностью трансформации гиперсингулярных интегральных уравнений на гладких контурах к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям, численные методы решения которых достаточно хорошо разработаны [9, 10].

Для приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений

$$a(t)x(t)+b(t)\int_\gamma \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}+\int_\gamma h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

$$a(t)x(t)+\int_\gamma \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau = f(t),$$

$$a(t)x(t)+\int_\gamma \frac{h(t,\tau,x(\tau))}{(\tau-t)^p}d\tau = f(t),$$

где γ – единичная окружность, $p=2,3,\ldots,$ предложены и обоснованы вычислительные схемы методов коллокации и механических квадратур [11].

Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на предфракталах начали исследоваться в последнее время [12].

2. Вспомогательные предложения

Пусть B – банахово пространство; K – линейный оператор, действующий из B в B; I – тождественный оператор. Логарифмическая норма $\Lambda(K)$ оператора K определяется [13] формулой

$$\Lambda(K)=\lim_{h\downarrow 0}(\|I+hK\|-1)h^{-1},$$

где запись $h\downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая. Во многих пространствах логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица $A=\{a_{ij}\}$, $i,j=1,2,\ldots,n,$ в n-мерном пространстве R_n векторов $x=(x_1,\ldots,x_n)$ с нормой

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|,\ \|x\|_2=\left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right]^{1/2},\ \|x\|_3=\max_{1\le k\le n}|x_k|.$$

Логарифмическая норма матрицы A равна [14]:

$$\Lambda_1(A)=\max_j\left(a_{jj}+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}|\right),\quad \Lambda_2(A)=\lambda_{\max}\left(\frac{A+A^T}{2}\right),$$

$$\Lambda_3(A)=\max_i\left(a_{ii}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|\right),$$

где $\lambda_{\max}((A+A^T)/2)$ – наибольшее собственное значение матрицы $(A+A^T)/2.$ В данной работе используется третья норма.

Логарифмическая норма обладает многими полезными в численном анализе свойствами.

Пусть A и B – квадратные матрицы с комплексными коэффициентами. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n),$ $y=(y_1,\ldots,y_n),$ $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n),$ $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ – n-мерные векторы с комплексными компонентами. Пусть фиксирована норма векторов и подчиненная ей операторная норма матриц; этой норме сопоставлена логарифмическая норма.

Теорема 1 [15]. Если $\Lambda(A)<0,$ то матрица A неособенная и $\left\|A^{-1}\right\|\le 1/|\Lambda(A)|.$

Теорема 2 [15]. Пусть $Ax=\xi,$ $By=\eta,$ причем $\Lambda(A)<0,$ $\Lambda(B)<0.$ Тогда $\|x-y\|\le\dfrac{\|\xi-\eta\|}{|\Lambda(B)|}+\dfrac{\|A-B\|\|\xi\|}{|\Lambda(A)\Lambda(B)|}.$

В работе используется следующий класс функций.

Определение 1. Обозначим через $W^r(M,[a,b])$ множество функций, определенных на сегменте $[a,b],$ имеющих непрерывные частные производные до $(r-1)$-го порядка, кусочно-непрерывную функцию r-го порядка и удовлетворяющих неравенствам $|\varphi^{(k)}(x)|\le M,$ $k=0,1,\ldots,r.$

3. Определения гиперсингулярных интегралов

Определение 2 [16]. Интеграл вида $\displaystyle\int_a^b\frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$ при целом p и $0<\alpha<1$ определяет величину («конечную часть») рассматриваемого интеграла как предел при $x\to b$ суммы

$$\int_a^x\frac{A(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}},$$

если предположить, что $A(x)$ имеет p производных в окрестности точки b.

Здесь $B(x)$ – любая функция, на которую налагаются два условия:

а) рассматриваемый предел существует;

б) $B(x)$ имеет по крайней мере p производных в окрестности точки $x = b$.

Произвольный выбор $B(x)$ никак не влияет на значение получаемого предела: условие (а) определяет значения $(p-1)$ первых производных от $B(x)$ в точке b, так что произвольный добавочный член в числителе есть бесконечно малая величина, по меньшей мере порядка $(b-x)^p$.

Определение 3. Интегралом

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}, \quad a \le c \le b,$$

в смысле главного значения Коши Адамара называется следующий предел:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v\to 0}\left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v)\ln v\right],$$

где $\xi(v), \xi_1(v)$ – некоторые функции, выбранные так, чтобы указанный предел существовал. При $c = a$ отсутствует первый интеграл в правой части предела; при $c = b$ отсутствует второй интеграл.

Рассмотрим интеграл

$$L\varphi \equiv \iint_G \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}},$$

где (t_1,t_2) – точка области G; p $(p>2)$ – целое число.

Пусть $R(t,\varepsilon)$ – круг с центром в точке $t=(t_1,t_2)$ и с радиусом ε.

Регуляризацией интеграла $L\varphi$ при $p \ge 3$ называется предел

$$L\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\int_{G\backslash R(t,\varepsilon)} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}} - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}} - C(\varepsilon)\ln\varepsilon\right),$$

где $B(x)$, $C(x)$ – любые функции, на которые налагаются следующие условия:

а) рассматриваемый предел существует;

б) $B(x)$ имеет непрерывные производные до $(p-2)$-го порядка в окрестности точки t;

в) функция $C(x)$ имеет производные первого порядка в окрестности нуля.

Достаточность этого определения доказана в [17].

4. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на фрактале Кантора

Классическое множество Кантора названо по имени Георга Кантора, который описал его в 1883 г. Множество Кантора строится на сегменте

$C_0 = [0,1]$. Построение начинается с средней части (не включая концов) единичного отрезка. В результате удаляется открытый интервал $(1/3, 2/3)$ и остается множество $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. На следующем этапе выкидываем среднюю часть сегментов $[0,1/3]$ и $[2/3,1]$. В результате получаем множество $C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$. Этот процесс продолжается до бесконечности, и на каждом его этапе выкидываются средние части сегментов, составляющих множества $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$ Предельное множество C, которое представляет собой пересечение множеств C_n, $n = 0,1,\ldots,$ называется классической пылью Кантора.

Нетрудно видеть, что на каждом n-м шаге построения пыли Кантора длины сегментов, составляющих множество C_n, равны $(1/3)^n$.

Пусть n достаточно велико. Построим вычислительную схему приближенного решения гиперсингулярного интегрального уравнения:

$$a(t)x(t) + b(t)\int\limits_{C_n} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau + \int\limits_{C_n} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), t \in C_n,\ p = 2,3,... \tag{1}$$

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \alpha_{i_1,\ldots,i_n} \psi_{i_1,\ldots,i_n}(t), \tag{2}$$

$$\psi_{i_1,\ldots,i_n}(t) = \begin{cases} 1, t \in \Delta_{i_1,\ldots,i_n}, \\ 0, t \in [0,1] \setminus \Delta_{i_1,\ldots,i_n}, \end{cases} \tag{3}$$

$$\Delta_{i_1,\ldots,i_n} = \left[\frac{2}{3}i_1 + \frac{2}{9}i_2 + \cdots + \frac{2}{3^n}i_n;\ \frac{2}{3}i_1 + \frac{2}{9}i_2 + \cdots + \frac{2}{3^n}i_n + \frac{1}{3^n}\right],\ i_0, i_1, \ldots, i_n = 0,1.$$

Каждому сегменту $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$ поставим в соответствие узел

$$\bar{t}_{i_1 \cdots i_n} = \frac{2}{3}i_1 + \frac{2}{9}i_2 + \cdots + \frac{2}{3^n}i_n + \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}.$$

Коэффициенты $\alpha_{i_1,\ldots,i_n}$ находятся из системы уравнений

$$a(\bar{t}_{i_1 \cdots i_n})\alpha_{i_1 \cdots i_n} + b(\bar{t}_{i_1 \cdots i_n}) \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n} \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \int\limits_{\Delta_{j_1 \cdots j_n}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_{i_1 \cdots i_n})^p} +$$

$$+ d_n \sum_{j_1, \ldots, j_n} h\left(\bar{t}_{i_1 \cdots i_n}, \bar{t}_{j_1 \cdots j_n}\right) \alpha_{j_1, j_2, \cdots, j_n} = f(\bar{t}_{i_1 \cdots i_n}),\ i_k = 0,2,\ k = 1,\ldots,n, \tag{4}$$

где суммирование $\sum\limits_{j_1, \cdots j_n}$ распространяется по всем сегментам, входящим в C_n, $d_n = 3^{-n}$.

Преобразуем систему (4) к следующему виду:

$$\left(\operatorname{sgn} b(\bar t_{i_1\cdots i_n})\right)\left(a\left(\bar t_{i_1\cdots i_n}\right)\alpha_{i_1\cdots i_n}+b\left(\bar t_{i_1\cdots i_n}\right)\sum_{j_1,j_2,\dots,j_n}\alpha_{j_1\cdots j_n}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{\Delta_{j_1\cdots j_n}}\frac{d\tau}{(\tau-\bar t_{i_1\cdots i_n})^p}+d_n\sum_{j_1,\dots,j_n}h\left(\bar t_{i_1\cdots i_n},\bar t_{j_1\cdots j_n}\right)\alpha_{i_1\cdots i_n}\right)=$$

$$=\left(\operatorname{sgn} b(\bar t_{i_1\cdots i_n})\right)f\left(\bar t_{i_1\cdots i_n}\right),\ \ i_1,\dots,i_n=0,2. \qquad (5)$$

Найдем условие однозначной разрешимости систем уравнений (4), (5).

Представим систему (5) в матричной форме $CX=F$ и вычислим логарифмическую норму матрицы C. Здесь $X=\{\alpha_{i_1\cdots i_n}\}$, $F=(\operatorname{sgn} b(\bar t_{i_1\cdots i_n}))f(\bar t_{i_1,\dots,i_n}),\ i=0,2.$

Диагональные элементы матрицы C имеют вид

$$\left(\operatorname{sgn} b(\bar t_{i_1\cdots i_n})\right)\left(a\left(\bar t_{i_1\cdots i_n}\right)+b\left(\bar t_{i_1\cdots i_n}\right)\int_{\Delta_{i_1\cdots i_n}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\bar t_{i_1\cdots i_n}\right)^p}+d_n h\left(\bar t_{i_1\cdots i_n},\bar t_{i_1\cdots i_n}\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{\Delta_{i_1\cdots i_n}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\bar t_{i_1\cdots i_n}\right)^p}=\int_{-1/2\,1/3^m}^{1/2\,1/3^m}\frac{d\tau}{\tau^p}=-\frac{2}{p-1}(2\cdot 3^n)^{p-1}.$$

Следовательно, диагональные элементы матрицы C равны

$$C_{ll}=-\left|b\left(\bar t_{i_1\cdots i_l}\right)\right|\frac{2}{p-1}(2\cdot 3^n)^{p-1}+$$

$$+\left(\operatorname{sgn} b(\bar t_{i_1\cdots i_n})\right)\left(a\left(\bar t_{i_1\cdots i_n}\right)+\frac{1}{3^n}h\left(\bar t_{i_1\cdots i_n},\bar t_{i_1\cdots i_n}\right)\right). \qquad (6)$$

Оценим сумму модулей вне диагональных элементов. Положим $(i_1,\dots,i_n)=(0,\dots,0)$ и оценим

$$I_{0\cdots 0}=|b(\bar t_{0\cdots 0})|\sum_{j_1\cdots j_n}{}'\left|\int_{\Delta_{j_1\cdots j_n}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\bar t_{0,\dots,0}\right)^p}\right|+d_n\sum_{j_1,\dots,j_n}{}'\left|h\left(\bar t_{0\cdots 0},\bar t_{j_1\cdots j_n}\right)\right|,$$

где $\sum\limits_{j_1\cdots j_n}{}'$ означает суммирование по $(j_1,\dots,j_n)\neq(0,\dots,0)$.

Очень грубая, но достаточная оценка дает

$$I_{0\dots 0} < |b(\bar{t}_{0\dots 0})| \int\limits_{\frac{2}{3^n}}^{1} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_{0\dots 0})^p} \le |b(\bar{t}_{0\dots 0})| \frac{1}{p-1} \left(\frac{2 \cdot 3^n}{3} \right)^{p-1}.$$

Отсюда следует, что сумма модулей любых внедиагональных элементов $I_{i_1 \dots i_n}$ не превосходит

$$I_{i_1 \cdots i_n} = |b(\bar{t}_{i_1 \dots i_n})| \sum_{j_1,\dots,j_n} \int\limits_{\Delta_{j_1 \dots j_n}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_{i_1,\dots,i_n})^p} | + H <$$

$$< |b(\bar{t}_{i_1 \dots i_n})| \frac{1}{p-1} 2 \left(\frac{2 \cdot 3^n}{3} \right)^{p-1} + H, \ \ H = \max |h(t,\tau)|. \tag{7}$$

Из выражений (6), (7) следует, что

$$\Lambda(C) = \max_{i_1 \cdots i_n} \left(\frac{2}{p-1} (2 \cdot 3^n)^{p-1} |b(\bar{t}_{i_1 \dots i_n})| \left(-1 + \frac{1}{3^{p-1}} \right) + \right.$$

$$\left. + (\operatorname{sgn} b(\bar{t}_{i_1 \dots i_n})) \left(a(\bar{t}_{i_1 \dots i_n}) + \frac{1}{3^n} h(\bar{t}_{i_1 \dots i_n}, \bar{t}_{i_1 \dots i_n}) \right) + H \right).$$

Отсюда следует, что при достаточно больших n логарифмическая норма матрицы C отрицательна и, следовательно, системы уравнений (4), (5) однозначно разрешимы.

Теорема 3. Пусть $a(t)$, $b(t)$, $h(t,\tau)$ – ограниченные функции, $|b(t)| \ge \alpha > 0$ при $t \in [0,1]$. Тогда при достаточно больших n системы (4), (5) однозначно разрешимы.

Однозначная разрешимость систем уравнений (4), (5) еще не гарантирует сходимость приближенного решения (4), (5) к точному решению уравнения $x^*(t)$.

Для доказательства сходимости решений приближенных уравнений к решению точного уравнения необходимо изменить вычислительную схему.

Для простоты обозначений рассмотрим уравнение

$$a(t)x(t) + b(t) \int\limits_{C_n} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau = f(t), \ \ t \in C_n. \tag{8}$$

Мы ограничиваемся особенностью порядка $p = 2$, так как она наиболее часто встречается в приложениях.

Приближенное решение уравнения (8) будем искать в виде кусочно-непрерывной функции:

$$x_n(t) = \sum_{l=1}^{2} \sum_{i_1,\ldots,i_n} \alpha_{l,i_1,\ldots,i_n} \varphi_{l,i_1,\ldots,i_n}(t),\ t \in C_n, \tag{9}$$

$$\varphi_{l,i_1,\ldots,i_n}(t) = \begin{cases} g_{l,i_1,\ldots,i_n}(t), t \in \Delta_{i_1,\ldots,i_n}, \\ 0, t \in [0,1] \setminus \Delta_{i_1,\ldots,i_n}. \end{cases} \tag{10}$$

Так как построение функций $g_{l,i_1,\ldots,i_n}(t)$ на интервалах $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$ однотипно, то опишем построение функций $g_{l,0,\ldots,0}(t)$ на интервале $\Delta_{0,\ldots,0}$.

Функция $g_{1,0,\ldots,0}(t)$ имеет вид

$$g_{1,0,\ldots,0}(t) = \begin{cases} 1,\ 0 \le t \le \dfrac{1}{3^{2n}}, \\ \dfrac{3^{2n}t - 3^n + 1}{2 - 3^n},\ \dfrac{1}{3^{2n}} \le t \le \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{3^{2n}}, \\ 0,\ \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{3^{2n}} \le t \le \dfrac{1}{3^n}; \end{cases} \tag{11}$$

$$g_{2,0,\ldots,0}(t) = \begin{cases} 0,\ \ 0 \le t \le \dfrac{1}{3^{2n}}, \\ \dfrac{3^{2n}t - 1}{3^n - 2},\ \dfrac{1}{3^{2n}} \le t \le \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{3^{2n}}, \\ 1,\ \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{3^{2n}} \le t \le \dfrac{1}{3^n}. \end{cases} \tag{12}$$

В качестве узлов коллокации возьмем узлы

$$t^1_{i_1,\ldots,i_n} = t_{i_1,\ldots,i_n} + \frac{1}{3^{2n}},\ t^2_{i_1,\ldots,i_n} = t_{i_1,\ldots,i_n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n}}.$$

Приравнивая левые и правые части уравнения (8) в узлах $t^1_{i_1,\ldots,i_n}$, $t^2_{i_1,\ldots,i_n}$, получаем систему линейных алгебраических уравнений 2^{n+1} порядка

$$a\left(t^l_{i_1,\ldots,i_n}\right)\alpha_{l,i_1,\ldots,i_n} + b\left(t^l_{i_1,\ldots,i_n}\right)\int\limits_{C_n} \frac{x_n(\tau)d\tau}{\left(\tau - t^l_{i_1,\ldots,i_n}\right)^2} = f\left(t^l_{i_1,\ldots,i_n}\right), \tag{13}$$

$$l = 1,2,\ i_j = 0,2,\ \ j = 0,1,\ldots,n-1.$$

Обоснование этой вычислительной схемы проводится по аналогии с обоснованием, приведенным в работе [4].

Теорема 4. Пусть выполнены следующие условия: 1) функции $a(t)$, $b(t)$ ограничены при $t \in [-1,1]$; 2) справедливо неравенство $|a(t)| \geq \alpha > 0$ при $t \in [-1,1]$; 3) уравнение (8) имеет единственное решение $x^*(t) \in W^2(M)$, $M = \text{const}$. Тогда система уравнений (13) имеет единственное решение $x_n^*(t)$ и справедлива оценка $\left\| x^*(t) - x_n^*(t) \right\| \leq C \dfrac{1}{3^n}$.

5. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на фрактале «пыль Серпинского»

Напомним построение фрактала, который называется пылью Серпинского. Рассмотрим на плоскости OXY квадрат $\Omega = [0,1;0,1]$. Построение фрактала заключается в последовательном выполнении следующих действий:

1. Квадрат Ω делится на девять равных квадратов прямыми, параллельными координатным осям, и выбрасывается центральный квадрат. Полученное множество обозначим через Ω_1.

2. Множество Ω_1 состоит из восьми квадратов со сторонами, параллельными координатным осям, и с длинами сторон равными 1/3. Пронумеруем эти квадраты начиная с квадрата, находящегося в левом нижнем углу квадрата Ω, двигаясь против часовой стрелки. Пронумерованные квадраты обозначим через $\Delta_{i_1}, i_1 = 1,2,...,8$. Каждый квадрат Δ_{i_1}, $i_1 = 1,2,...,8$, делится на девять равных квадратов и из каждого выбрасывается центральный квадрат. Оставшиеся в квадрате $\Delta_{i_1}, i_1 = 1,2,...,8$, более мелкие квадраты пронумеруем, двигаясь против часовой стрелки начиная с левого нижнего квадрата, расположенного в Δ_{i_1}. Полученные квадраты обозначим через $\Delta_{i_1 i_2}, i_1, i_2 = 1,2,...,8$. Полученное множество обозначим через Ω_2.

3. Описанная выше процедура проделывается с множеством Ω_2, затем с Ω_3 и т.д.

Замечание. Предфрактал n-го порядка обозначается через Ω_n.

Пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ множеств Ω_i, $i = 1,2,...$, называется пылью Серпинского.

Будем рассматривать гиперсингулярные интегральные уравнения на предфракталах n-го порядка. Квадраты, входящие, в предфрактал n-го порядка, обозначим через $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, где $1 \leq i \leq 8$, $j = 1,2,...,n$.

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2) + b(t_1,t_2)\int\int\limits_{\Omega_n} \frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^p} = f(t_1,t_2), (t_1,t_2) \in \Omega_n. \quad (14)$$

Приближенное решение уравнения (14) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_n(t_1,t_2)=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n}\alpha_{i_1,i_2,\dots i_n}\psi_{i_1,i_2,\dots i_n}(t_1,t_2),t_1,t_2\in\Omega_n, \tag{15}$$

$$\psi_{i_1 i_2\dots i_n}(t_1,t_2)=\begin{cases}1, & (t_1,t_2)\in\Delta_{i_1\dots i_n},\\ 0, & (t_1,t_2)\in\Omega\setminus\Delta_{i_1\dots i_n},\end{cases} \tag{16}$$

$i_j, i=1,2,\dots,8, j=1,2,\dots,n.$

Сумма в формуле (16) распространяется на индексы i_j, $i=1,2,\dots,8, j=1,2,\dots,n.$

Обозначим $\bar{t}_{i_1\dots i_n}$ пересечение диагоналей в квадрате $\Delta_{i_1\dots i_n}$.

Коэффициенты $\{\alpha_{i_1 i_2\dots i_n}\}$ определяются из решения системы

$$a(\bar{t}_{i_1\dots i_n})\alpha_{i_1\dots i_n}+$$

$$+b(\bar{t}_{i_1\dots i_n})\sum_{j_1,j_2,\dots,j_n}\alpha_{j_1 j_2\dots j_n}\int\limits_{\Delta_{j_i\dots j_n}}\int\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\bar{t}^1_{i_1\dots i_n}\right)^2+\left(\tau_2-\bar{t}^2_{i_1\dots i_n}\right)^2\right)^p}=$$

$$=f\left(\bar{t}_{i_1\dots i_n}\right),\quad i_j, i=1,2,..,8,\quad j=1,2,\dots,n. \tag{17}$$

Здесь $\bar{t}^l_{i_1\dots i_n}, l=1,2,$ – проекции точки $\bar{t}_{i_1\dots i_n}$ на оси x_l, $l=1,2.$

Предложенный метод справедлив для произвольных вещественных значений p. Ниже для определенности мы остановимся на случае, когда $p=3$, так как сингулярность порядка $p=3$ находит наибольшее применение в прикладных задачах.

Известно [7], что

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d\frac{dxdy}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-d)^2}}{(x_0-a)(y_0-d)}-\frac{\sqrt{(x_0-b)^2+(y_0-d)^2}}{(x_0-b)(y_0-d)}+$$

$$+\frac{\sqrt{(x_0-b)^2+(y_0-c)^2}}{(x_0-b)(y_0-c)}-\frac{\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-c)^2}}{(x_0-a)(y_0-c)}. \tag{18}$$

Диагональные элементы в системе уравнений (17) имеют вид

$$a(\bar{t}_{i_1}\cdots_{i_n})+b(\bar{t}_{i_1}\cdots_{i_n})\int\limits_{\Delta_{i_1}\cdots_{i_n}}\frac{dxdy}{\left(\left(\tau_1-\bar{t}_{i_1}\cdots_{i_n}\right)^2+\left(\tau_2-\bar{t}_{i_1}\cdots_{i_n}\right)^2\right)^{3/2}}. \tag{19}$$

Из формулы (18) следует, что

$$\int_{\Delta_{i_1\cdots i_n}}\int \frac{dxdy}{((\tau_1-\bar{t}_{i_1\cdots i_n})^2+(\tau_2-\bar{t}_{i_1\cdots i_n})^2)^{3/2}}=$$

$$=\int_{\Delta_*}\int \frac{dxdy}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{3/2}}=-2^{5/2}3^n,\ \ \Delta_*=\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2. \qquad (20)$$

Легко видеть, что при выполнении условия $|b(t,\tau)|\ge\alpha>0$, $(t,\tau)\in[0,1]^2$, система уравнений (17) эквивалентна системе уравнений

$$\left(\mathrm{sgn}b(\bar{t}_{i_1\cdots i_n})\right)\left[a\left(\bar{t}_{i_1\cdots i_n}\right)\alpha_{i_1\ldots i_n}+\right.$$

$$\left.+b\left(\bar{t}_{i_1\cdots i_n}\right)\sum_{j_1\cdots j_n}\alpha_{j_1\cdots j_n}\int_{\Delta_{j_1\cdots j_n}}\int\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-\bar{t}^1_{i_1\cdots i_n}\right)^2+\left(\tau_2-\bar{t}^2_{i_1\cdots i_n}\right)^2\right)^{3/2}}\right]=$$

$$=\mathrm{sgn}\left(b\left(\bar{t}_{i_1\cdots i_n}\right)\right)f\left(\bar{t}_{i_1\cdots i_n}\right),\ i_j;i=1,2,...,8,\ \ j=1,2,\ldots,n. \qquad (21)$$

Система уравнений (21) в матричной форме имеет вид $\tilde{C}X=\tilde{F}$, причем структуры матрицы $\tilde{C}$, векторов X и $\tilde{F}$ очевидны.

Из формул (19) и (20) следует, что диагональные элементы матрицы $\tilde{C}$ равны

$$(\mathrm{sgn}\,b(\bar{t}_{1_1,,,i_n}))(a(\bar{t}_{i_1\cdots i_n})-2^{5/2}3^n b(\bar{t}_{i_1\cdots i_n})),i_j:i=0,2,j=0,1,\ldots,n-1.$$

Оценка сумм модулей внедиагональных элементов матрицы $\tilde{C}$ достаточна громоздка и здесь не приводится. Можно показать, что при ряде условий логарифмическая норма матрицы $\tilde{C}$ отрицательна.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть функции $a(t,\tau)$, $b(t,\tau)$ ограничены и $|b(t,\tau)|\ge\alpha>0$ при $(t,\tau)\in[0,1]^2$. Тогда при достаточно больших значениях n системы уравнений (17) и (21) однозначно разрешимы.

Предложенные выше алгоритмы апробированы в работе [18].

Список литературы

1. **Кроновер, Р. М.** Фракталы и хаос в динамических системах / Р. М. Кроновер. – М. : Техносфера, 2006. – 488 с.
2. **Boykov, I. V.** An approximate solution of hypersingular integral equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Applied Numerical Mathematics. – 2010. – Vol. 60 (6). – P. 607–628.

3. **Бойков, И. В.** Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма с интегралом в смысле главного значения Коши – Адамара / И. В. Бойков // Функциональный анализ и теория функций. – Вып. 7. – Казань : Изд-во КГУ, 1970. – С. 3–23.
4. **Boykov, I. V.** An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, V. A. Roudnev, A. I. Boykova // Applied Numerical Mathematics. – 2014. – Vol. 86, December. – P. 1–21.
5. **Capobiano, M. R.** On the numerical solution of a nonlinear integral equation of Prandtl's type / M. R. Capobiano, G. Criscuolo, P. Junghanns // Operator Theory: Advances and Applications. – 2005. – Vol. 160. –P. 53–79.
6. **Вайникко, Г. М.** Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – М. : Янус-К, 2001. – 508 с.
7. **Оселедец, И. В.** Приближенное обращение матриц / И. В. Оселедец, Е. Е. Тыртышников // Журнал вычисслительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 2. – С. 315–326.
8. **Бойков, И. В.** Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, М. А. Сёмов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 11–27.
9. **Бойков, И. В.** К приближенному решению сингулярных интегродифференциальных уравнений. 1 [линейные уравнения] / И. В. Бойков, И. И. Жечев // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, № 8. – С. 1493–1502.
10. **Бойков, И. В.** К приближенному решению сингулярных интегродифференциальных уравнений. 2 [нелинейные уравнения] / И. В. Бойков, И. И. Жечев // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 3. – С. 562–571.
11. **Бойков, И. В.** Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокаций / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, М. А. Сёмов, А. А. Есафьев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (31). – С. 101–113.
12. **Бойков, И. В.** Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на предфракталах / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, П. В. Айкашев // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. – С. 49–58.
13. **Далецкий, Ю. Л.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 534 с.
14. **Деккер, К.** Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – М. : Мир, 1988.
15. **Лозинский, С. М.** Замечание о статье В. С. Годлевского / С. М. Лозинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1973. – № 2. – С. 457–459.
16. **Адамар, Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 351 с.
17. **Бойков, И. В.** Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – 252 с.
18. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах. Вычислительный эксперимент / И. В. Бойков, П. В. Айкашев // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. X Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2016.

References

1. Kronover R. M. *Fraktaly i khaos v dinamicheskikh sistemakh* [Fractals and chaos in dynamic systems]. Moscow: Tekhnosfera, 2006, 488 p.
2. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. *Applied Numerical Mathematics*. 2010, vol. 60 (6), pp. 607–628.
3. Boykov I. V. *Funktsional'nyy analiz i teoriya funktsiy* [Functional analysis and functions theory]. Iss. 7. Kazan: Izd-vo KGU, 1970, pp. 3–23.
4. Boykov I. V., Ventsel E. S., Roudnev V. A., Boykova A. I. *Applied Numerical Mathematics*. 2014, vol. 86, December, pp. 1–21.
5. Capobiano M. R., Criscuolo G., Junghanns P. *Operator Theory: Advances and Applications*. 2005, vol. 160, pp. 53–79.
6. Vaynikko G. M., Lifanov I. K., Poltavskiy L. N. *Chislennye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh prilozheniya* [Numerical methods in hypersingular integral equations and applications thereof]. Moscow: Yanus-K, 2001, 508 p.
7. Oseledets I. V., Tyrtyshnikov E. E. *Zhurnal vychisslitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2005, vol. 45, no. 2, pp. 315–326.
8. Boykov I. V., Boykova A. I., Semov M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 3 (35), pp. 11–27.
9. Boykov I. V., Zhechev I. I. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1973, vol. 9, no. 8, pp. 1493–1502.
10. Boykov I. V., Zhechev I. I. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1975, vol. 11, no. 3, pp. 562–571.
11. Boykov I. V., Zakharova Yu. F., Semov M. A., Esafev A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko -matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 3 (31), pp. 101–113.
12. Boykov I. V., Boykova A. I., Aykashev P. V. *Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: sb. st. IX Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. molodykh spetsialistov, aspirantov i studentov* [Mathematical and computer modeling of natural scientific and social problems: proceedings of IX International scientific and technical conference of young specialists, postgraduate and undergraduate students]. Penza: Izd-vo PGU, 2015, pp. 49–58.
13. Daletskiy Yu. L., Kreyn M. G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of differential equation solutions in Banach space]. Moscow: Nauka, 1970, 534 p.
14. Dekker K., Verver Ya. *Ustoychivost' metodov Runge-Kutty dlya zhestkikh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Stability of the Runge-Kutta methods for stiff non-linear differential equations]. Moscow: Mir, 1988.
15. Lozinskiy S. M. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 1973, no. 2, pp. 457–459.
16. Adamar Zh. *Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* [The Cauchy problem for linear equations with partial derivatives of hyperbolic type]. Moscow: Nauka, 1978, 351 p.
17. Boykov I. V. *Priblizhennye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Ch. 2. Gipersingulyarnye integraly* [Approximate methods of singular and hypersingular integrals calculation: Part 2. Hypersingular integrals]. Penza: Izd-vo PGU, 2009, 252 p.
18. Boykov I. V., Aykashev P. V. *Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: sb. st. X Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf.*

[Mathematical and computer modeling of natural scientific and social problems: proceedings of X International scientific and technical conference]. Penza: Izd-vo PGU, 2016.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boykov Il'ya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Бойкова Алла Ильинична
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Boykova Alla Il'inichna
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Айкашев Павел Владимирович
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Aykashev Pavel Vladimirovich
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 517.392

Бойков, И. В.

Проекционные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, П. В. Айкашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 1 (37). – С. 71–86.